Planche 1 – Type Centrale

Question de cours

Justifier que la frontière entre espèces de même nombre d'oxydation est verticale.

Exercice : Étude d'une force centrale type Yukawa

Préliminaire. On considère un point matériel M de masse m soumis à une force centrale conservative attractive $\vec{F}(r) = -F(r)\,\vec{e}_r$ avec $F(r) > 0$, dérivant d'une énergie potentielle $E_p(r)$. On suppose que M décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre de force O.

1. Montrer que le mouvement est nécessairement uniforme. Exprimer la vitesse v_0 et la pulsation ω_0 du mouvement en fonction de m, r_0 et $F(r_0)$.
2. Définir l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ associée à un mouvement quelconque soumis à $\vec{F}(r)$ centrale conservative. Montrer que la condition d'orbite circulaire de rayon r_0 se traduit par $\dfrac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(r_0) = 0$.
3. Énoncer le critère permettant de déterminer si l'orbite circulaire de rayon r_0 est stable.

Application : interaction de type Yukawa. Soit O un point fixe et P un mobile de masse m. On note $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ et $\vec{e}_r = \overrightarrow{OP}/\|\overrightarrow{OP}\|$. Le point P subit la force

$$\vec{F} = -\frac{k\,e^{-r/a}}{r^2}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\vec{e}_r, \quad \text{avec } k > 0 \text{ et } a > 0.$$

Cette expression rappelle qualitativement le comportement de l'interaction nucléaire forte, a jouant le rôle d'une portée caractéristique.

4. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à cette force, avec la convention $E_p(\infty) = 0$.
5. Sous quelle(s) condition(s) le mouvement de P peut-il être circulaire de rayon r_0 ? Discuter selon la valeur du rapport r_0/a.
6. L'équilibre trouvé est-il stable ? Que peut-on en déduire sur la possibilité d'observer un état lié dans ce potentiel ?
7. Que dire du comportement de la force lorsque $r \gg a$? Comparer qualitativement avec le cas d'une force gravitationnelle ou coulombienne.

Planche 3 – Type ENS

Question de cours

Décrire la constitution générale d'un diagramme E-pH : axes, domaines de prédominance et d'existence, conventions de tracé des frontières (simple ou atomique).

Exercice : Trajectoire d'une comète

Une comète de masse m se trouve sur une trajectoire parabolique autour du Soleil de masse M.

En supposant que le plan de sa trajectoire est le même que celui de la trajectoire terrestre, déterminer sous quelle(s) condition(s) le temps T passé par la comète à l'intérieur de l'orbite terrestre est maximal et déterminer cette valeur.

Planche 2 – Type Mines-Ponts

Question de cours

Établir la pente de la frontière entre deux espèces d'un couple redox Ox/Red dont la demi-équation s'écrit :

$$\alpha\,\mathrm{Red} + \beta\,\mathrm{H_2O} = \gamma\,\mathrm{Ox} + \delta\,\mathrm{H^+} + n\,e^-$$

Exercice 1 : Vaisseau spatial (15 minutes de préparation)

Un vaisseau spatial de masse m se déplace initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre sphérique de masse M, à la vitesse v_0. Le commandant de bord dispose d'un *« budget de vitesse »* Δv égal à $4v_0$: cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4v_0$.

1. Évaluer la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de $\mathcal{G}$, M et r_0.
2. **Option 1 :** le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5v_0$. Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini ») en fonction de v_0.
3. **Option 2 :** on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de v_0 à $v_0/2$, en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction.
   (a) Décrire la nouvelle trajectoire : nature, demi-grand axe a, distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée, normes des vitesses v_A et v_P à l'apogée et au périgée, en fonction de r_0 et v_0.
   (b) On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de v_0.
4. Comparer les deux options et conclure sur la stratégie la plus efficace.

Exercice 2 : Étoile capturée par un trou noir

Une étoile de rayon $R = 10^{11}$ cm et de masse $M = 10^{33}$ g se déplace sur une orbite parabolique autour d'un trou noir de masse $M_0 = 10^{40}$ g. Le moment cinétique par unité de masse de l'étoile sur cette trajectoire est $L = 10^{23}$ cm^2 s^{-1}. On suppose que le potentiel gravitationnel du trou noir est de la forme :

$$V(r) = -\frac{\mathcal{G}M_0}{r - R_0} \quad \text{pour } r > R_0, \quad \text{et } V(r) = -\infty \text{ sinon.}$$

1. On considère, dans cette question uniquement, que le potentiel gravitationnel du trou noir est newtonien : $V(r) = -\mathcal{G}M_0/r$. Définir le rayon R_0 du trou noir comme le rayon depuis lequel la vitesse de libération vaut c (vitesse de la lumière). Exprimer R_0 et faire l'application numérique.
2. L'orbite présente-t-elle un point de rayon minimal ? Le déterminer si oui.
3. L'étoile peut-elle rester intacte lors de cette trajectoire ? (Question hors programme, il faut regarder les forces de marée)

Données : $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-8}$ cm^3 g^{-1} s^{-2} ; $c = 3{,}0 \times 10^{10}$ cm s^{-1}.