Exercice 1 : Vaisseau spatial (15 minutes de préparation)

Un vaisseau spatial de masse m se déplace initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre sphérique de masse M, à la vitesse v_0. Le commandant de bord dispose d'un *« budget de vitesse »* Δv égal à $4v_0$: cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4v_0$.

1. Évaluer la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de $\mathcal{G}$, M et r_0.
2. **Option 1 :** le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5v_0$. Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini ») en fonction de v_0.
3. **Option 2 :** on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de v_0 à $v_0/2$, en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction.
   (a) Décrire la nouvelle trajectoire : nature, demi-grand axe a, distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée, normes des vitesses v_A et v_P à l'apogée et au périgée, en fonction de r_0 et v_0.
   (b) On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de v_0.
4. Comparer les deux options et conclure sur la stratégie la plus efficace.