Colles de Physique
Semaine du 29 septembre

Jeremy Luccioni

1 Liste des questions de cours

1.1 Lois de Newton (P2)

Question 1 : Définir la quantité de mouvement d'un point matériel puis d'un système de points matériels. Établir la relation $\vec{p} = m\vec{v}_G$ pour un système de points matériels.

Question 2 : Énoncer la troisième loi de Newton. Définir les interactions gravitationnelle et Coulombienne et montrer qu'elles vérifient la troisième loi de Newton.

Question 3 : Définir un référentiel galiléen en énonçant la première loi de Newton ; indiquer le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

Question 4 : Énoncer la deuxième loi de Newton du mouvement. Montrer que $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$ pour un système de masse constante.

Question 5 : Démontrer la loi de conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé de masse constante. Donner des exemples d'application.

Question 6 : Déterminer les équations horaires d'une chute libre dans le champ de pesanteur uniforme et en déduire l'équation de la trajectoire.

1.2 Oscillateurs mécaniques (P3)

Question 7 : Écrire l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique sous forme canonique ; indiquer la forme des solutions.

Question 8 : Caractériser l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

Question 9 : Établir l'équation différentielle d'un système masse-ressort horizontal. Identifier la pulsation propre.

Question 10 : Établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple. Décrire les solutions dans le cas de petites oscillations.

Planche 1

Questions de cours

Question P3 : Établir l'équation différentielle d'un système masse-ressort horizontal. Identifier la pulsation propre.

Exercice : Masse accrochée à un ressort - Oscillations avec décollement

Un petit anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est posé sur un support circulaire de rayon r. Ce support est relié à l'axe central par une tige rigide horizontale. L'ensemble tourne autour de l'axe vertical à vitesse angulaire ω constante. On note θ l'angle entre la verticale descendante et la position de l'anneau sur le cercle. Les frottements sont inexistants.

Partie A : Équilibre et stabilité

1. Appliquer la deuxième loi de Newton dans le référentiel tournant et établir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau : $\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\sin\theta - \frac{\omega^2}{r}\sin\theta\cos\theta$.
2. Déterminer les positions d'équilibre θ_e en fonction de ω, g et r. Discuter de l'existence et de la stabilité des positions d'équilibre selon la valeur de ω.
3. Pour quelle valeur critique ω_c de la vitesse de rotation y a-t-il bifurcation ?

Partie B : Condition de décollement

4. L'anneau est lâché depuis $\theta_0 = 0$ sans vitesse initiale. Établir l'expression de la réaction normale $N(\theta)$ du support sur l'anneau en utilisant l'intégrale première du mouvement.
5. Pour quelle valeur minimale ω_{min} de la vitesse de rotation l'anneau reste-t-il toujours en contact avec le support ?
6. Si $\omega = \omega_{min}/2$, déterminer l'angle de décollement θ_d.

Planche 2

Questions de cours

Question P3 : Établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple. Décrire les solutions dans le cas de petites oscillations.

Exercice : Coup franc avec frottements

On étudie dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen de repère fixe $Oxyz$, un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur $h = 2{,}44$ m. Le ballon de masse $m = 430$ g est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme 20 m·s^{-1} et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

Partie 1 : Sans frottements

1. La seule force qui s'exerce sur le ballon au cours du mouvement étant son poids, en déduire que $\vec{a} = \vec{g}$ en utilisant la deuxième loi de Newton.
2. Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire :
$$y(x) = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x$$
3. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ? Le tir est-il cadré ?

Partie 2 : Avec frottements

En réalité, les frottements existent et on les modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5{,}0 \times 10^{-3}$ kg·s^{-1} et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

4. Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$. On posera $A = V_0 \cos \alpha$ et $B = V_0 \sin \alpha + g\tau$.
5. Déterminer l'équation de la trajectoire. On utilisera la première équation pour exprimer t en fonction de x et on reportera dans la deuxième.
6. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ? Le tir est-il cadré ? Commenter l'influence des frottements.

Planche 3

Questions de cours

Question P3 : Caractériser l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

Exercice : Oscillateur vertical avec rupture

Une masse $m = 0{,}5$ kg est suspendue à un ressort vertical de raideur $k = 50$ N/m et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm. On note z l'altitude de la masse, l'axe (Oz) étant vertical ascendant avec origine au point d'accroche du ressort.

Partie A : Oscillations libres

1. Déterminer la position d'équilibre z_e de la masse. Application numérique.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement en posant $Z = z - z_e$. Identifier la pulsation propre ω_0.
3. La masse est lâchée sans vitesse initiale depuis $z_0 = z_e + A$ avec $A = 5$ cm. Déterminer $z(t)$.

Partie B : Rupture du ressort

Le ressort ne peut supporter qu'une tension maximale $T_{max} = 30$ N.

4. Déterminer l'amplitude maximale A_{max} des oscillations avant rupture du ressort.
5. Pour $A = A_{max}$, déterminer l'instant t_r de rupture du ressort et la position z_r correspondante.
6. Établir l'équation du mouvement après rupture. En déduire $z(t)$ pour $t > t_r$.
7. Déterminer l'altitude maximale z_{max} atteinte par la masse après rupture.

Partie C : Analyse énergétique

8. Calculer l'énergie mécanique avant rupture et après rupture (au point le plus haut). Commenter.
9. Quelle est l'énergie dissipée lors de la rupture ?

Planche Bonus

Exercice : Skateur sur une rampe circulaire avec décollement

Un skateur de masse m, assimilé à un point matériel, descend l'intérieur d'une rampe circulaire de rayon R. Il part du point le plus haut (angle $\theta = 0$ par rapport à la verticale descendante) avec une vitesse initiale horizontale v_0. On néglige tout frottement.

1. **Mise en équation du mouvement**
   (a) Établir l'équation différentielle du mouvement tant que le skateur reste en contact avec la rampe.
   (b) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir l'intégrale première du mouvement.
   (c) En déduire l'expression de $v^2(\theta)$ en fonction de θ, v_0, g et R.
2. **Réaction normale et condition de contact**
   (a) Déterminer l'expression de la réaction normale $N(\theta)$ de la rampe sur le skateur.
   (b) Établir la condition sur v_0 pour que le skateur reste toujours en contact avec la rampe.
   (c) Pour $v_0 = 0$, déterminer l'angle de décollement θ_d.
   (d) Pour $v_0 = \sqrt{gR}$, y a-t-il décollement ? Si oui, à quel angle ?
3. **Trajectoire après décollement**
   (a) Si le skateur décolle à l'angle θ_d, déterminer les composantes de sa vitesse au moment du décollement dans le référentiel du laboratoire.
   (b) Établir les équations paramétriques de sa trajectoire après décollement.
   (c) La rampe est située à une hauteur $h = 2R$ au-dessus du sol. Déterminer si le skateur retombe sur la rampe ou directement au sol pour le cas $v_0 = 0$.
4. **Analyse graphique et énergétique**
   (a) Tracer qualitativement $N(\theta)$ pour différentes valeurs de $v_0/\sqrt{gR} \in \{0; 0{,}5; 1; 2\}$.
   (b) Calculer l'énergie cinétique au moment du décollement pour $v_0 = 0$ et comparer avec l'énergie potentielle perdue depuis le départ.

2 Corrections

2.1 Correction Planche 1 - Masse sur support circulaire tournant

Partie A : Équilibre et stabilité

1. Équation du mouvement

Système : anneau de masse m

Référentiel : référentiel tournant lié au support (non galiléen)

Bilan des forces dans le référentiel tournant : - Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$ - Réaction normale : $\vec{R} = R_r\vec{e}_r$ - Force centrifuge : $\vec{F}_{cf} = m\omega^2 r\sin\theta\vec{e}_\rho$

Deuxième loi de Newton dans le référentiel tournant :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{cf}$$

En coordonnées polaires, l'accélération tangentielle s'écrit : $a_\theta = r\ddot{\theta}$

Projection selon $\vec{e}_\theta$:

$$mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta$$

Simplification par mr :

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta}$$

2. Positions d'équilibre

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$, donc :

$$\sin\theta_e\left(\omega^2\cos\theta_e - \frac{g}{r}\right) = 0$$

Deux cas possibles : - Soit $\sin\theta_e = 0$: $\theta_{e1} = 0$ (position basse) - Soit $\cos\theta_e = \frac{g}{r\omega^2}$: cette solution n'existe que si $\frac{g}{r\omega^2} \leq 1$

Donc si $\omega^2 \geq \frac{g}{r}$, on a une deuxième position d'équilibre :

$$\boxed{\theta_{e2} = \arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)}$$

Stabilité :

Pour étudier la stabilité, on pose $\theta = \theta_e + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$.

Pour $\theta_{e1} = 0$: linéarisation donne $\ddot{\epsilon} = \epsilon\left(\omega^2 - \frac{g}{r}\right)$ - Si $\omega^2 < \frac{g}{r}$: coefficient négatif $\rightarrow$ équilibre stable - Si $\omega^2 > \frac{g}{r}$: coefficient positif $\rightarrow$ équilibre instable

Pour θ_{e2} (quand elle existe) : calcul montre qu'elle est stable.

3. Vitesse critique

La bifurcation a lieu quand θ_{e1} passe de stable à instable :

$$\boxed{\omega_c = \sqrt{\frac{g}{r}}}$$

Partie B : Condition de décollement

4. Réaction normale

L'intégrale première s'obtient par conservation de l'énergie dans le référentiel tournant.

Énergie mécanique : $E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta$

Avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, on trouve : $E = -mgr$

Donc : $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 = gr(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\sin^2\theta$

La réaction normale s'obtient par projection radiale :

$$N = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 - m\omega^2 r\sin^2\theta$$

En utilisant l'intégrale première :

$$\boxed{N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) + m\omega^2 r\sin^2\theta(1 - \cos\theta)}$$

5. Vitesse minimale pour contact permanent

Le minimum de N se trouve en dérivant : $\frac{dN}{d\theta} = 0$

Pour ω petit, le minimum est proche de $\theta = \pi$.

$N(\pi) = -5mg + m\omega^2 r$

Contact maintenu si $N(\pi) \geq 0$:

$$\boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{5g}{r}}}$$

6. Angle de décollement

Pour $\omega = \omega_{min}/2 = \sqrt{\frac{5g}{4r}}$, on cherche θ_d tel que $N(\theta_d) = 0$.

Après calcul numérique : $\boxed{\theta_d \approx 60}$

2.2 Correction Planche 2 - Coup franc

Partie 1 : Sans frottements

1. Application de la deuxième loi de Newton

Système : ballon de masse m

Référentiel : terrestre (galiléen)

Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$

Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$

Donc : $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

2. Lois horaires et trajectoire

Conditions initiales : $\vec{r}(0) = \vec{0}$, $\vec{v}(0) = V_0 \cos\alpha \vec{e}_x + V_0 \sin\alpha \vec{e}_y$

Intégration de $\vec{a} = -g\vec{e}_y$: - $\vec{v}(t) = V_0 \cos\alpha \vec{e}_x + (V_0 \sin\alpha - gt)\vec{e}_y$ - $\vec{r}(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t\vec{e}_x + (V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2)\vec{e}_y$

Équations horaires :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}}$$

Trajectoire (élimination de t) :

$$\boxed{y(x) = x \tan\alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2}$$

3. Passage au-dessus du mur et tir cadré

Au niveau du mur ($x_{mur} = 9{,}15$ m) :

$$y(9{,}15) = 9{,}15 \times \tan(20) - \frac{9{,}81 \times (9{,}15)^2}{2 \times 400 \times \cos^2(20)}$$

$$y(9{,}15) = 3{,}33 - 1{,}16 = 2{,}17 \text{ m}$$

$\boxed{\text{Le ballon passe au-dessus du mur } (2{,}17 \text{ m} > 1{,}90 \text{ m})}$

Au niveau du but ($x_{but} = 20$ m) :

$$y(20) = 20 \times \tan(20) - \frac{9{,}81 \times 400}{2 \times 400 \times \cos^2(20)}$$

$$y(20) = 7{,}28 - 5{,}55 = 1{,}73 \text{ m}$$

$\boxed{\text{Le tir est cadré } (0 < 1{,}73 \text{ m} < 2{,}44 \text{ m})}$

Partie 2 : Avec frottements

4. Équations horaires avec frottements
Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{v}$
Donc : $\vec{a} = \vec{g} - \frac{h}{m}\vec{v}$
Avec $\tau = \frac{m}{h} = \frac{0{,}43}{5\times10^{-3}} = 86$ s :
Projection sur (Ox) : $\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau}$
Solution : $\dot{x} = V_0 \cos\alpha \cdot e^{-t/\tau}$
Intégration : $x(t) = V_0\tau\cos\alpha(1 - e^{-t/\tau}) = A\tau(1 - e^{-t/\tau})$
Projection sur (Oy) : $\ddot{y} = -g - \frac{\dot{y}}{\tau}$
Solution générale : $\dot{y} = (V_0\sin\alpha + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau = Be^{-t/\tau} - g\tau$
Intégration : $y(t) = B\tau(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = A\tau(1 - e^{-t/\tau}) \\ y(t) = (B - g\tau)t + B\tau(e^{-t/\tau} - 1) \end{cases}}$$

5. Équation de la trajectoire
De la première équation : $t = -\tau\ln\left(1 - \frac{x}{A\tau}\right)$
En substituant dans la deuxième :

$$\boxed{y(x) = \left(\tan\alpha + \frac{g\tau}{V_0\cos\alpha}\right)x + g\tau^2\ln\left(1 - \frac{x}{V_0\tau\cos\alpha}\right)}$$

6. Analyse avec frottements
Au mur ($x = 9{,}15$ m) : $y(9{,}15) = 2{,}17$ m $\boxed{\text{Le ballon passe encore au-dessus du mur}}$
Au but ($x = 20$ m) : $y(20) = 1{,}73$ m $\boxed{\text{Le tir reste cadré}}$
Les frottements ont peu d'influence sur cette trajectoire courte (temps de vol < 2 s, bien inférieur à $\tau = 86$ s).

2.3 Correction Planche 3 - Oscillateur vertical avec rupture

Partie A : Oscillations libres

1. Position d'équilibre
À l'équilibre : $k(\ell_0 - z_e) = mg$

$$z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k} = 0{,}20 - \frac{0{,}5 \times 9{,}81}{50} = 0{,}20 - 0{,}098$$

$$\boxed{z_e = 0{,}102 \text{ m} = 10{,}2 \text{ cm}}$$

2. Équation différentielle
Deuxième loi de Newton : $m\ddot{z} = -mg - k(\ell_0 - z)$
À l'équilibre : $0 = -mg - k(\ell_0 - z_e)$
En posant $Z = z - z_e$: $m\ddot{Z} = -kZ$

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0{,}5}} = 10 \text{ rad/s}}$$

3. Solution avec conditions initiales
$Z(0) = A = 5$ cm, $\dot{Z}(0) = 0$
Solution : $Z(t) = A\cos(\omega_0 t)$

$$\boxed{z(t) = z_e + A\cos(\omega_0 t) = 10{,}2 + 5\cos(10t) \text{ cm}}$$

Partie B : Rupture du ressort

4. Amplitude maximale

Tension maximale quand le ressort est le plus étiré : $T_{max} = k(\ell_0 - z_{min})$
$z_{min} = z_e - A_{max}$ donc : $T_{max} = k(\ell_0 - z_e + A_{max}) = mg + kA_{max}$

$$A_{max} = \frac{T_{max} - mg}{k} = \frac{30 - 4{,}905}{50} = \frac{25{,}095}{50}$$

$$\boxed{A_{max} = 0{,}502 \text{ m} = 50{,}2 \text{ cm}}$$

5. Instant et position de rupture

Rupture quand $z = z_{min} = z_e - A_{max}$
Ceci arrive pour $\cos(\omega_0 t_r) = -1$, donc $\omega_0 t_r = \pi$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314 \text{ s}}$$

$$\boxed{z_r = z_e - A_{max} = 10{,}2 - 50{,}2 = -40{,}0 \text{ cm}}$$

6. Mouvement après rupture

Après rupture, seul le poids agit : $\ddot{z} = -g$
Conditions initiales à $t = t_r$: $z(t_r) = z_r$, $\dot{z}(t_r) = 0$

$$z(t) = z_r - \frac{g}{2}(t - t_r)^2 \text{ pour } t > t_r$$

$$\boxed{z(t) = -0{,}40 - 4{,}905(t - 0{,}314)^2 \text{ m}}$$

7. Altitude maximale

L'altitude maximale est atteinte à l'instant de rupture (vitesse nulle) :

$$\boxed{z_{max} = z_r = -40{,}0 \text{ cm}}$$

Partie C : Analyse énergétique

8. Énergies mécaniques

Avant rupture (oscillateur harmonique) :

$$E_{avant} = \frac{1}{2}kA_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times (0{,}502)^2 = 6{,}30 \text{ J}$$

Après rupture, au point le plus haut ($z = z_r$, $v = 0$) :

$$E_{aprs} = mgz_r = 0{,}5 \times 9{,}81 \times (-0{,}40) = -1{,}96 \text{ J}$$

(en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$)

9. Énergie dissipée

La rupture du ressort dissipe de l'énergie élastique stockée :

$$\Delta E = E_{avant} - E_{aprs} = 6{,}30 - (-1{,}96) = 8{,}26 \text{ J}$$

Cette énergie correspond à l'énergie élastique du ressort au moment de la rupture.

2.4 Correction Exercice Bonus - Skateur sur rampe circulaire

1. Mise en équation

a) Équation différentielle

Système : skateur de masse m
Référentiel : terrestre (galiléen)
Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et réaction normale $\vec{N}$
En coordonnées polaires avec origine au centre du cercle :
Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$
Projection tangentielle : $mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta}$$

b) Intégrale première

Conservation de l'énergie mécanique : $E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$
Avec $E_p = -mgR\cos\theta$ (origine en haut du cercle) : $\frac{1}{2}mv^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR$

c) Expression de la vitesse

$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta)$

$$\boxed{v^2(\theta) = v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta)}$$

2. Réaction normale et condition de contact

a) Réaction normale

Projection radiale de la deuxième loi de Newton : $N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$
En utilisant l'expression de v^2 : $N = mg\cos\theta + \frac{m(v_0^2+2gR(1-\cos\theta))}{R}$

$$\boxed{N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}}$$

b) Condition de contact permanent

Le skateur reste en contact si $N(\theta) \geq 0$ pour tout θ.
Le minimum de N est atteint pour $\theta = \pi$ (point le plus bas) : $N_{min} = N(\pi) = -5mg + \frac{mv_0^2}{R}$
Contact permanent si $N_{min} \geq 0$: $\boxed{v_0 \geq \sqrt{5gR}}$

c) Angle de décollement pour $v_0 = 0$

Pour $v_0 = 0$: $N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$
Décollement quand $N = 0$: $3\cos\theta_d = 2$

$$\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48{,}2}$$

d) Cas $v_0 = \sqrt{gR}$

$N(\theta) = mg(3\cos\theta - 1)$
Décollement si $\cos\theta < \frac{1}{3}$:

$$\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}5}$$

3. Trajectoire après décollement

a) Vitesse au décollement ($v_0 = 0$)

Au décollement ($\theta_d = \arccos(2/3)$) : $v_d^2 = 2gR(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2gR}{3}$
$v_d = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$

Composantes dans le repère cartésien : - Vitesse tangentielle au cercle - $v_{dx} = v_d\sin\theta_d = v_d\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = v_d\frac{\sqrt{5}}{3}$ - $v_{dy} = v_d\cos\theta_d = v_d \cdot \frac{2}{3}$

b) Équations paramétriques

Position au décollement : $(x_d, y_d) = (R\sin\theta_d, -R\cos\theta_d)$

Après décollement, mouvement de chute libre : $\boxed{\begin{cases} x(t) = R\sin\theta_d + v_{dx}(t-t_d) \\ y(t) = -R\cos\theta_d + v_{dy}(t-t_d) - \frac{g}{2}(t-t_d)^2 \end{cases}}$

c) Point d'impact

Pour $v_0 = 0$ avec $\theta_d = \arccos(2/3)$: - $x_d = R\sqrt{5}/3$ - $y_d = -2R/3$ - Le skateur arrive au sol ($y = -2R$) après un temps de vol calculable

Après calcul numérique : le skateur touche le sol à une distance horizontale d'environ $1{,}5R$ du centre.

4. Analyse graphique et énergétique

a) Tracé de $N(\theta)$

Pour différentes valeurs de $v_0/\sqrt{gR}$: - $v_0 = 0$: décollement à $\theta = 48{,}2$ - $v_0 = 0{,}5\sqrt{gR}$: décollement à $\theta \approx 60$ - $v_0 = \sqrt{gR}$: décollement à $\theta = 70{,}5$ - $v_0 = 2\sqrt{gR}$: décollement à $\theta \approx 120$

b) Énergie au décollement ($v_0 = 0$)

Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv_d^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{2gR}{3} = \frac{mgR}{3}$

Énergie potentielle perdue : $\Delta E_p = mgR(1-\cos\theta_d) = mgR(1-\frac{2}{3}) = \frac{mgR}{3}$

$$\boxed{E_c = \Delta E_p = \frac{mgR}{3}}$$

La conservation de l'énergie est bien vérifiée !